



Estructura, Relación y Fundamento: Lectura Lógica del Paso de la Teoría de Conjuntos a la Teoría de Categorías

Author Information

Dr. Aldo Kevin Roblero Balbuena

Universidad Autónoma de Chiapas

RESUMEN

Este trabajo analiza el tránsito filosófico y lógico de la Teoría de conjuntos a la Teoría de categorías. Expone cómo la primera concibe la estructura desde la pertenencia y la sustancia, mientras la segunda redefine la identidad en términos de relaciones y coherencia global. El fundamento matemático deja de ser una base fija y pasa a entenderse como una red dinámica de transformaciones. En síntesis, la Teoría de categorías no solo amplía el horizonte formal de las matemáticas, sino que también propone una ontología relacional que transforma nuestra comprensión del conocimiento y la realidad.

Keywords and Phrases: Ciencias formales, Teoría de Conjuntos, Teoría de Categorías, Filosofía de las Matemáticas

2020 AMS Mathematics Subject Classification: 03A05, 18A05, 00A30

Aldo Kevin Roblero Balbuena
Universidad Autónoma de Chiapas

Mi propósito en esta intervención no es profundizar en los desarrollos técnicos de la Teoría de categorías, sino reflexionar sobre su sentido estructural dentro de la lógica y la filosofía de las matemáticas. Me interesa cómo el cambio de paradigma —del conjunto a la relación— transforma nuestra comprensión de lo que significa fundamentar una teoría.

Introducción

Tomarse el tiempo para investigar el tránsito de la Teoría de conjuntos a la Teoría de categorías sigue siendo filosófica y matemáticamente pertinente en la actualidad porque no se trata simplemente de una sustitución técnica entre formalismos, sino de una transformación profunda en la concepción del fundamento matemático.

Desde el plano filosófico, autores como Muller (2001) examinan críticamente la relación entre conjuntos, clases y categorías, mostrando que la cuestión no es meramente formal, sino conceptual: el paso al marco categórico implica revisar los compromisos ontológicos y la noción misma de identidad matemática. En lugar de entender los objetos primariamente como colecciones de elementos, el enfoque categórico desplaza la atención hacia las estructuras y las relaciones.

Esta reorientación se articula con claridad en Awodey (2014), quien vincula la Teoría de categorías con el estructuralismo filosófico y el principio de invariancia, y la conecta con el programa de fundamentos univalentes. En *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics* (The Univalent Foundations Program, 2013), esta línea alcanza una formulación sistemática: la identidad matemática deja de ser una igualdad meramente extensional y se reformula en términos de equivalencia estructural, integrando Teoría de tipos, homotopía y categorías dentro de una propuesta fundacional alternativa.

En el plano matemático, Johnstone (2002) muestra que la Teoría de topos constituye un entorno capaz de reconstruir amplios sectores de la matemática desde un marco categórico con lógica interna propia. Esta perspectiva no elimina la Teoría de conjuntos, pero la reinterpreta dentro de una arquitectura conceptual más amplia. A ello le suma el desarrollo contemporáneo de las ∞ -categorías y de la Teoría de categorías superiores en las últimas décadas, que ha ampliado significativamente el alcance del enfoque categórico, especialmente en contextos homotópicos y geométricos.

En este contexto, investigar el paso de la Teoría de conjuntos a la Teoría de categorías implica interrogar qué significa fundamentar la matemática: si hacerlo en términos de pertenencia y colección, o en términos de estructura, morfismo e invariancia. Es precisamente en este punto donde se sitúa el presente trabajo: no se orienta a competir en el plano técnico ni a defender la supremacía de un marco sobre otro, sino a ofrecer una



lectura lógico-filosófica del tránsito mismo. Al interpretar el desplazamiento desde una ontología de la pertenencia hacia una ontología relacional como una transformación del concepto de fundamento —de base sustancial a coherencia estructural— la investigación se inserta directamente en la discusión contemporánea sobre el sentido filosófico del giro categórico.

1. La estructura en la Teoría de conjuntos: el orden desde la pertenencia

La Teoría de conjuntos representa la primera gran formalización moderna del concepto de estructura. Desde Cantor (1874; 1878; 1883; 1895; 1897), el conjunto se concibió como una totalidad unificada de elementos —un *conjunto de cosas determinadas por su pertenencia* (ϵ). La axiomatización de Zermelo (1908) y Fraenkel (1922a; 1922b; 1928) perfeccionó este enfoque, transformando la intuición cantoriana en un sistema lógico capaz de sustentar toda la matemática.

No obstante, en este modelo, la *estructura* se deriva del contenido: un conjunto está definido por los elementos que contiene. La identidad entre conjuntos es extensional; dos conjuntos son iguales si poseen los mismos miembros. En este sentido, la Teoría de conjuntos asume una ontología sustancialista, en la que lo que algo es depende de su composición interna.

Como observó W. V. O. Quine (1948) en su célebre tesis de que ser es ser el contenido de una variable, la existencia matemática se traduce en pertenencia dentro de un universo formal. Este modo de concebir la estructura implica que toda organización posible se construye “desde abajo”, a partir de entidades elementales y sus agregaciones. Sin embargo, esta visión resulta insuficiente cuando el interés se desplaza del contenido de los objetos hacia las transformaciones y relaciones que estos mantienen entre sí.

2. La relación como principio: el giro categórico

Frente a los límites de la ontología de la pertenencia, la Teoría de categorías realiza un giro decisivo: el de la *relación* como principio estructurante. Eilenberg y Mac Lane (1945) introducen la noción de *categoría* para describir, no los elementos de un conjunto, sino las conexiones entre objetos mediante *morfismos o flechas*.

En este marco, un objeto se define no por lo que contiene, sino por cómo se relaciona con los demás. La categoría inaugura así una lógica de segundo orden, una lógica relacional, en la que los vínculos son las entidades fundamentales. Esta idea tiene resonancias filosóficas profundas, anticipadas por C. S. Peirce en su lógica de las relaciones (Gómez y Cuadrado, 2012), donde la significación emerge de las conexiones y no de las sustancias aisladas.

El cambio lógico que introduce la Teoría categórica se refleja en la sustitución de la igualdad extensional por la noción de isomorfismo: dos objetos son esencialmente iguales si existe entre ellos una correspondencia estructural invertible. Como sostiene

Lawvere (1964), el isomorfismo expresa una igualdad funcional, más rica que la mera coincidencia de elementos.

De este modo, la categoría no elimina la estructura, sino que la reconfigura como red. Dicho esto, en lugar de concebir la matemática como un edificio asentado sobre unidades básicas, la propone como un entramado coherente de transformaciones y el concepto de *relación* se convierte en una verdadera medida de la estructura.

3. El fundamento como coherencia: hacia una ontología relacional

La cuestión del *fundamento* adquiere aquí una nueva significación. En la Teoría de conjuntos, el fundamento se busca en un punto fijo —como ocurre con el conjunto vacío o el sistema de axiomas Zermelo-Fraenkel— que garantiza la estabilidad del edificio matemático. En la Teoría de categorías, en cambio, el fundamento ya no reside en una base sustancial, sino en la coherencia de las relaciones.

En su *Elementary Theory of the Category of Sets* (ETCS), Lawvere (1964) propuso axiomatizar la categoría de conjuntos y funciones sin recurrir a una metateoría conjuntista, mostrando que la matemática puede construirse directamente en términos categóricos. El fundamento, visto desde esa perspectiva, deja de ser una colección de objetos primarios para convertirse en una trama de correspondencias consistentes.

El concepto de *topos*, desarrollado por Lawvere y Myles Tierney (1971), lleva esta idea al extremo: un topos es un universo matemático completo, con su propia lógica interna, donde la noción de conjunto se generaliza a un contexto relacional. La solidez del sistema no proviene de una sustancia última, sino de la coherencia global de su estructura.

De manera complementaria, como observa Barry Mazur (1997), la igualdad y la verdad en este nuevo marco son contextuales: un objeto es igual a otro dentro de una red de relaciones que define su identidad. El fundamento se convierte así en una propiedad del sistema como totalidad, y no de un elemento aislado.

4. De la sustancia a la estructura, de la estructura a la relación: un silogismo hipotético

El paso de la Teoría de conjuntos a la Teoría de categorías puede comprenderse como una secuencia lógica: de la sustancia a la estructura, y de la estructura a la relación. En la primera etapa, el pensamiento matemático busca los ladrillos elementales del ser; en la segunda, reconoce que la forma de conexión entre ellos es lo que confiere sentido y unidad.

Este tránsito implica también una transformación del modo de entender el conocimiento matemático en el sentido de que la verdad deja de ser una propiedad fija para convertirse en una propiedad relacional: una proposición es verdadera dentro de un marco categorial



si, y sólo si, se mantiene consistente con las relaciones y diagramas que lo estructuran. La categoría, en síntesis, no destruye el fundamento, sino que lo distribuye en una red de coherencias.

Desde una perspectiva filosófica, esta evolución refleja un desplazamiento desde la ontología hacia una epistemología estructural donde el saber no es reductible a conocer lo que las cosas son, sino que se extiende hasta comprender cómo se relacionan. La Teoría de categorías, en este sentido, no es solo un nuevo lenguaje para la matemática, sino que se puede proponer incluso como una nueva lógica de la experiencia, hablando desde un enfoque formal.

Conclusión

El paso de la Teoría de conjuntos a la Teoría de categorías representa una mutación en la arquitectura del pensamiento matemático. Mientras la primera construye el universo desde la sustancia y la pertenencia, la segunda lo hace desde la estructura y la relación.

En la teoría categórica, el fundamento no es una base inmóvil, sino la coherencia dinámica de una red de transformaciones. La estructura deviene relación, y la relación deviene fundamento. Este desplazamiento lógico traduce una revolución filosófica: el ser matemático no se define sólo en términos de lo que es, sino también por cómo se conecta.

Así, tras este breve recorrido por lo que podemos llamar una serie de conceptos básicos, es posible reconocer que la Teoría de categorías no sólo amplía el horizonte formal de las matemáticas, sino también el horizonte ontológico de nuestro pensamiento en tanto que nos invita a comprender la realidad no solo como un conjunto de cosas, sino como una estructura de relaciones coherentes que, en su totalidad, constituye el fundamento del saber.

Apéndice: tres ejemplos filosóficos del paso estructural en la teoría

1. La Teoría de conjuntos y la epistemología clásica

En la definición tradicional del conocimiento (Villoro, 1982) —*como creencia verdadera y justificada*— podemos pensar en tres conjuntos: el conjunto de las creencias de un sujeto, el conjunto de las proposiciones verdaderas, y el conjunto de las proposiciones justificadas.

El conocimiento sería entonces la intersección entre esos tres conjuntos. Hay que decir que este modelo tiene un valor lógico: nos permite representar el conocimiento como una coincidencia estructural entre dominios distintos, lo cual expresa bien el ideal clásico de correspondencia entre mente y mundo. Sin embargo, este modelo es *estático*, puesto que se basa en la pertenencia o no pertenencia a conjuntos bien definidos.

2. Quine y la red de creencias

Cuando Quine (1960) introduce su noción de la red de creencias, el paradigma cambia. Ya no hay conjuntos cerrados, sino una estructura dinámica de relaciones donde cada creencia se sostiene por su conexión con las demás. Con esto puede decirse que su tesis sobre *ser el valor de una variable* se reviste de una nueva complejidad, en el sentido de que dicha variable ya no se concebiría como un elemento básico sino como enmarcada dentro de una serie de relaciones estructurales que la definen.

De acuerdo con lo anterior, la metáfora de la red se aproxima mucho más a lo que hoy llamaríamos una estructura categórica: lo importante no son los elementos aislados, sino las relaciones (o morfismos) que los vinculan, y así, de manera natural, pasamos de un modelo conjuntista a uno estructuralista en el cual el conocimiento ya no se reduce a la intersección de propiedades, sino a la coherencia relacional del sistema en su totalidad.

3. Fodor y la modularidad de la mente

La Teoría de los módulos cognitivos de Jerry Fodor (1986) muestra cómo el pensamiento puede explicarse desde su estructura funcional, sin importar la sustancia física o material de la mente. Esto coincide con la lógica categorial, donde lo relevante no es la naturaleza de los objetos, sino el tipo de relaciones que mantienen entre sí.

La mente, en este sentido, se comporta como una categoría: un sistema de componentes interrelacionados cuyo funcionamiento depende de la organización estructural más que de la composición interna. Esto da paso a una conexión muy interesante con algunas variantes de lo que se conoce como funcionalismo en el contexto de la filosofía de la mente (Pineda, 2012).

Reflexión final: ¿por qué hablar del paso de la Teoría de conjuntos a la Teoría de categorías tiene relevancia filosófica?

Porque ese paso expresa una transformación en nuestra manera de concebir las estructuras del conocimiento y de la realidad. Pasamos de un modelo estático, basado en pertenencias, a un modelo dinámico y relacional, donde lo que da identidad a las cosas no es lo que son en sí mismas, sino la red de relaciones que establecen. Y eso tiene consecuencias tanto para la lógica y el pensamiento formal en general, como para la filosofía de la mente y la epistemología.



References

- [1] Steve Awodey. Structuralism, invariance, and univalence. *Philosophia Mathematica*, 22(1):1–11, 2014.
- [2] Georg Cantor. Über eine eigenschaft des inbegriffes aller reellen algebraischen zahlen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 77:258–262, 1874.
- [3] Georg Cantor. Ein beitrag zur mannigfaltigkeitslehre. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 84:242–258, 1878.
- [4] Georg Cantor. *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*. Teubner, Leipzig, 1883.
- [5] Georg Cantor. Beiträge zur begründung der transfiniten mengenlehre. *Mathematische Annalen*, 46(4):481–512, 1895.
- [6] Georg Cantor. Beiträge zur begründung der transfiniten mengenlehre ii. *Mathematische Annalen*, 49(2):207–246, 1897.
- [7] Samuel Eilenberg and Saunders Mac Lane. General theory of natural equivalences. *Transactions of the American Mathematical Society*, 58(2):231–294, 1945.
- [8] Jerry A. Fodor. *La modularidad de la mente: un ensayo sobre la psicología de las facultades*. Ediciones Morata, 1986.
- [9] Abraham Fraenkel. Zu den grundlagen der cantor-zermeloschen mengenlehre. *Mathematische Annalen*, 86(3–4):230–237, 1922.
- [10] Abraham Fraenkel. Über die existenz von mengen, die gewissen eigenschaften genügen. *Mathematische Zeitschrift*, 9(1–2):250–272, 1922.
- [11] Abraham Fraenkel. *Einleitung in die Mengenlehre*. Springer, Berlin, 1928.
- [12] L. Gómez and G. Cuadrado. La lógica de relaciones y la lógica cuantificacional: aportes de Charles S. Peirce. *Revista de Informática y Automática (RIA)*, 2012. Universidad Tecnológica Nacional.
- [13] Peter T. Johnstone. *Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium*. Oxford University Press, 2002.
- [14] F. William Lawvere. Functorial semantics of algebraic theories. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 50(5):869–872, 1963.
- [15] F. William Lawvere. An elementary theory of the category of sets. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 52(6):1506–1511, 1964.
- [16] F. William Lawvere. Adjointness in foundations. *Dialectica*, 23(3–4):281–296, 1969.
- [17] F. William Lawvere. Equality in hyperdoctrines and comprehension schema as an adjoint functor. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, pages 1–14, Bucharest, 1970.

-
- [18] F. William Lawvere and Myles Tierney. Quantifiers and sheaves. In *Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970)*, Tome 1, pages 329–334, 1971.
 - [19] Saunders Mac Lane. *Mathematics: Form and Function*. Springer-Verlag, 1986.
 - [20] Barry Mazur. *When is One Thing Equal to Some Other Thing?* Harvard University Press, 1997.
 - [21] F. A. Muller. Sets, classes, and categories. *British Journal for the Philosophy of Science*, 2001.
 - [22] Charles Sanders Peirce. *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*. Harvard University Press, 1931–1958.
 - [23] David Pineda. *La mente humana*. Cátedra, 2012.
 - [24] Willard Van Orman Quine. On what there is. *The Review of Metaphysics*, 2(1):21–38, 1948.
 - [25] Willard Van Orman Quine. *Word and Object*. MIT Press, 1960.
 - [26] The Univalent Foundations Program. *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics*. Institute for Advanced Study, 2013.
 - [27] Luis Villoro. *Creer, saber, conocer*. Siglo XXI, 1982.
 - [28] Ernst Zermelo. Untersuchungen über die grundlagen der mengenlehre i. *Mathematische Annalen*, 65(2):261–281, 1908.