

Capítulo 4

Teoría trascendental de números

Hasta el momento, hemos desarrollado las herramientas esenciales que nos van a permitir estudiar los números trascendentales. Lo natural, es encontrar propiedades que sean ciertas para todos los números algebraicos, así, si alguna de estas propiedades no se cumplen para algún número, es porque éste no puede ser un número algebraico, es decir, debe ser un número trascendental. Es decir, intentamos determinar la esencia de un número algebraico. Por lo tanto, no es sorpresa que estas propiedades tengan aplicaciones en otras áreas, como en las ecuaciones diofantinas.

4.1 Aproximación diofantina

Históricamente, la primera propiedad encontrada que separa a los números algebraicos de los números trascendentales, es la precisión con la que se pueden aproximar por un número racional.

Teorema 4.1.1 (Teorema de Dirichlet). Dado $\zeta \in \mathbb{R}$, existen enteros p, q tales que:

$$\left| \zeta - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$$

Demostración. Sea $\{x\}$ la parte fraccionaria, $[x\zeta]$ la parte entera y Q un entero suficientemente grande para que $q < Q$. Y consideremos los $Q + 1$ números $0, \{\zeta\}, \{2\zeta\}, \dots, \{(Q - 1)\zeta\}, 1$ que pertenecen a los $\frac{1}{Q}$ intervalos. Por el principio de Dirichlet, existen dos de estos que pertenecen al mismo intervalo. Afirmando que la diferencia tiene la forma $q\zeta - p$, veamos:

$$\{q_2\zeta\} - \{q_1\zeta\} = q_2\zeta - [q_2\zeta] - q_1\zeta + [q_1\zeta] = (q_2 - q_1)\zeta - [q_2\zeta] + [q_1\zeta]$$

Definiendo $q = q_2 - q_1$ y $p = \lfloor q_2 \zeta \rfloor - \lfloor q_1 \zeta \rfloor$ entonces $\{q_2 \zeta\} - \{q_1 \zeta\} = q\zeta - p$. Por lo tanto,

$$|q\zeta - p| < \frac{1}{Q} \Rightarrow \left| \zeta - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{qQ} < \frac{1}{q^2}$$

Para cualquier $Q > q$, lo cual completa la demostración. ■

Lo más natural es preguntarse si es posible obtener una mejor aproximación para ciertos números o hay un límite para ello. Liouville encontró una cota para los números algebraicos que impide obtener una mejor aproximación por los racionales. Y con ello, fabricó un número que se aproximara mejor que cualquier número algebraico, es decir, un número trascendental.

Teorema 4.1.2 (Teorema de Liouville). Sea ζ cualquier número algebraico de grado n , y cualesquiera enteros p, q se tiene que:

$$\left| \zeta - \frac{p}{q} \right| > \frac{K}{q^n}$$

Demostración. Dado que ζ es un número algebraico, entonces existe el mínimo polinomio irreducible $f \in \mathbb{Z}[x]$ tal que $f(\zeta) = 0$ por la Proposición 2.3.1. Ahora, sea $x \in [\zeta - 1, \zeta + 1]$, utilicemos el Teorema 2.5.2 para $f'(x)$ (dado que la derivada de cualquier función polinomial es polinomial y por lo tanto continua y diferenciable por el Teorema 2.5.1 y Corolario 2.5.1) se tiene que:

$$f'(x) < M$$

Observemos que M depende únicamente de ζ , ya que $M = f'(c)$ para alguna $c \in [\zeta - 1, \zeta + 1]$ y f depende de ζ por ser su mínimo polinomio irreducible.

Por otro lado, es claro que $f\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$, pues es suficiente garantizar que $\frac{p}{q}$ no es una raíz. En caso de serlo, podemos buscar una aproximación más cercana de ζ con $\zeta \neq \frac{p_2}{q_2}$ tal que $\frac{p_2}{q_2}$ no sea raíz, como el grado del polinomio es finito, no puede contener infinitas raíces, por lo que es un proceso finito y $\frac{p_2}{q_2} \approx \frac{p}{q}$ por lo que el teorema vale para p, q originales. Así,

$$\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \sum_{i=0}^n \left| a_i \left(\frac{p}{q}\right)^i \right| = \frac{1}{q^n} \left| \sum_{i=0}^n a_i p^i q^{n-i} \right|$$

Afirmo que $\left| \sum_{i=0}^n a_i p^i q^{n-i} \right| > 1$, como es la suma de enteros, es suficiente ver que

la suma es distinta de 0. Supongamos lo contrario, entonces $\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| = 0$ lo

cual es una contradicción por lo anterior. Por lo tanto,

$$\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \frac{1}{q^n} \left| \sum_{i=0}^n a_i p^i q^{n-i} \right| > \frac{1}{q^n}$$

Ahora, consideremos el intervalo $(\frac{p}{q}, \zeta)$, por el Teorema 2.5.3:

$$f(\zeta) - f\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{p}{q} - \zeta\right) f'(x)$$

Donde $x \in (\zeta, \frac{p}{q}) \subset [\zeta - 1, \zeta + 1]$, por lo tanto,

$$\left| \frac{p}{q} - \zeta \right| = \frac{\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right|}{|f'(x)|} > \frac{1}{Mq^n} = \frac{K}{q^n}$$

■

Observación. Baker propone $M = n^2(1 + |\zeta|)^{n-1}H$ donde $H = \max\{|a_i|\}$, es decir, el máximo de los valores absolutos de los coeficientes de f . Lo cual, es muy claro si consideramos que M solo debe satisfacer $f'(x) < M$ para $x \in (\zeta - 1, \zeta + 1)$. Como $\{|a_i|\} \leq H$, $i \leq n$ y $x < 1 + |\zeta|$ entonces:

$$f'(x) = \sum_{i=1}^n i(a_i)x^{i-1} < \sum_{i=1}^n nH(1 + |\zeta|)^{n-1} = n^2(1 + |\zeta|)^{n-1}H$$

Por lo cual esta cota no es particularmente buena, por mencionar una mejor, directamente de lo anterior:

$$M = \frac{n(n+1)(1 + |\zeta|)^{n-1}H}{2}$$

Aunque es posible reemplazar 1 por $\frac{p}{q}$ para mejorar la cota, la intención es proporcionar una constante independiente de p y q .

Trascendencia a partir del Teorema de Louville: A partir de lo anterior, Louville se dio cuenta que esta propiedad no es universal para los números trascendentes, puesto que se pueden generar números con una mejor aproximación por racionales. Consideremos

$$\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$$

Definamos:

$$p_j = 10^{j!} \sum_{n=1}^j \frac{1}{10^{n!}}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \left| \zeta - \frac{p_j}{10^{j!}} \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}} - \sum_{n=1}^j \frac{1}{10^{n!}} \right| = \left| \sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}} \right| \\ &= \frac{1}{10^{(j+1)!}} + \frac{1}{10^{(j+2)!}} + \dots = \frac{1}{10^{(j+1)!}} \left(1 + \frac{1}{10^{(j+2)}} + \frac{1}{10^{(j+3)}} + \dots \right) \\ &< \frac{1}{10^{(j+1)!}} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots \right) = \frac{1}{10^{(j+1)!}} \left(\frac{10}{9} \right) = \left(\frac{10}{9} \right) \frac{1}{10^{(j+1)(j!)}} < \frac{1}{(10^{j!})^j} \end{aligned}$$

Tomando $j > n$ donde n es el grado de ζ , contradice el teorema de Louville, por lo tanto, ζ no es algebraico, por lo tanto, es trascendental.

4.2 Teorema de Lindemann

Teorema 4.2.1 (Teorema de Lindemann). Para cualesquiera números algebraicos distintos $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ y cualesquiera números algebraicos no nulos $\beta_1, \dots, \beta_n$ se tiene que:

$$\beta_1 e^{\alpha_1} + \dots + \beta_n e^{\alpha_n} \neq 0$$

Demostración. Supongamos lo contrario, entonces existe una combinación lineal tal que:

$$\beta_1 e^{\alpha_1} + \dots + \beta_n e^{\alpha_n} = 0$$

Sea K la extensión normal que contiene las raíces $\beta_1, \dots, \beta_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n$. Consideremos

$$\prod_{\sigma \in G(K, \mathbb{Q})} [\sigma(\beta_1) e^{\sigma(\alpha_1)} + \dots + \sigma(\beta_n) e^{\sigma(\alpha_n)}] = 0$$

El producto tiene como resultado 0, porque $1_K \in G(K, \mathbb{Q})$, es decir, $(\beta_1 e^{\alpha_1}) + \dots + \beta_n e^{\alpha_n}$ está en el producto. Supongamos que $G(K, \mathbb{Q}) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_d\}$. Expandiendo el producto se obtiene:

$$\sum \sigma_1(\beta_{1*}) \cdots \sigma_d(\beta_{n*}) e^{\sigma_1(\alpha_{1*}) + \dots + \sigma_d(\alpha_{n*})} = 0$$

Donde $1*, \dots, n*$ son en realidad todas las posibles combinaciones de $1, \dots, n$. Por ejemplo, $\sigma_1(\beta_1) \cdots \sigma_d(\beta_1)$ está en la suma. Es decir, es la suma de n^n ecuaciones. Formalmente, lo escribimos de la siguiente manera:

$$\sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_n=1}^n \sigma_1(\beta_{i_1}) \cdots \sigma_d(\beta_{i_n}) \cdot e^{\sigma_1(\alpha_{i_1}) + \dots + \sigma_d(\alpha_{i_n})} = 0$$

Los exponentes $\sigma_1(a_{i_1}) + \dots + \sigma_d(a_{i_n})$ pueden tener el mismo valor. Agrupamos los términos con exponentes iguales. Sean $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ los distintos valores de $\sigma_1(a_{i_1}) + \dots + \sigma_d(a_{i_n})$ y sea J_k el conjunto de vectores $(i_1, \dots, i_n)$ tal que

$$\sigma(a_{i_1}) + \dots + \sigma(a_{i_n}) = \gamma_k$$

Por lo tanto, la sumatoria se convierte en:

$$\sum_{k=1}^s \delta_k e^{\gamma_k} = 0 \quad \text{donde } \delta_k = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in J_k} \sigma_1(\beta_{i_1}) \cdots \sigma_d(\beta_{i_n})$$

Notemos que cada $\sigma \in G(K, \mathbb{Q})$ permuta los pares $(\gamma_1, \delta_1), \dots, (\gamma_s, \delta_s)$. Veremos que es imposible que todos los δ_k sean 0 mostrando que existe un vector tal que $\sigma(\alpha_{i_1}) + \dots + \sigma(\alpha_{i_n})$ es distinto de todos los demás exponentes. Así, para alguna k , el conjunto J_k tiene cardinalidad 1 y $\delta_k \neq 0$.

Definamos un orden total en $\mathbb{C}$ definiendo $\zeta < \omega$ si $\text{Re } \zeta < \text{Re } \omega$ o bien, $\text{Re } \zeta = \text{Re } \omega$ y $\text{Im } \zeta < \text{Im } \omega$. Este orden total tiene la propiedad que si ζ_i, ω_i son números complejos con $\zeta_i < \omega_i$ para $i = 1, \dots, r$, entonces

$$\sum_{j=1}^r \zeta_j < \sum_{j=1}^r \omega_j$$

Como $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ son distintos por hipótesis, entonces $\sigma(\alpha_1), \dots, \sigma(\alpha_n)$ son distintos, de lo contrario, $\sigma(\alpha_i) = \sigma(\alpha_j)$, por ser un grupo, existe σ^{-1} tal que

$$\sigma^{-1}\sigma(\alpha_i) = \sigma^{-1}\sigma(\alpha_j) \Rightarrow \alpha_i = \alpha_j$$

Lo cual es una contradicción. Entonces para cada $k \in \{1, \dots, d\}$ existe un índice i_k tal que $\sigma_k(\alpha_{i_k}) > \sigma_k(\alpha_j)$ para $j \neq i_k$. Esto implica que

$$\sigma_1(\alpha_{i_1}) + \dots + \sigma_d(\alpha_{i_n}) > \sigma_1(\alpha_{j_1}) + \dots + \sigma_d(\alpha_{j_n})$$

Para todos los vectores $(j_1, \dots, j_n) \neq (i_1, \dots, i_n)$ y así, $\sigma_1(\alpha_{i_1}) + \dots + \sigma_d(\alpha_{i_n})$ es distinto del resto de los exponentes. Y claramente $\delta_k \neq 0$, de lo contrario, algún $\sigma_j(\beta_i) = 0$ y repetimos la demostración del Lema 2.3.5. En conclusión, asumamos sin pérdida de generalidad que $\delta_1, \dots, \delta_t$ son los números no nulos entre $\delta_1, \dots, \delta_s$. Entonces,

$$\sum_{k=1}^t \delta_k e^{\gamma_k} = 0$$

Donde cada δ_k es distinto de 0 y cada γ_k son distintos números algebraicos tales que σ permuta los pares $(\gamma_1, \delta_1), \dots, (\gamma_t, \delta_t)$. Utilizando el Lema 2.3.2, podemos

encontrar un entero m tal que $m\delta_k$ es un entero algebraico para toda k . Por lo tanto, definamos $\mu_k = m\delta_k$, así,

$$\sum_{k=1}^t \mu_k e^{\gamma_k}$$

Donde cada μ_k es un entero algebraico distinto de 0 y cada γ_k son números algebraicos distintos tales que σ permuta los pares $(\gamma_1, \mu_1), \dots, (\gamma_t, \mu_t)$. Sea p un número primo y utilizando el Lema 2.3.2, podemos encontrar un entero l tal que $l\gamma_k$ es un entero algebraico para toda k . Para $k = 1, \dots, t$ definimos

$$f_k(x) := \frac{1}{(p-1)!} \cdot l^{tp}(x - \gamma_k)^{p-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^t (x - \gamma_j)^p$$

$$f_k(z) := \int_0^z e^{z-u} f_k(u) du$$

$$M_k := \mu_1 F_k(\gamma_1) + \dots + \mu_t F_k(\gamma_t)$$

Demostraremos que se cumple:

1. Para cada $\sigma \in G(K, \mathbb{Q})$, se tiene que $\sigma(M_1) \in \{M_1, \dots, M_t\}$
2. Si p es suficientemente grande, entonces M_1 es un entero algebraico distinto de 0.
3. $|M_k| < 1$ para $k = 1, \dots, t$ para p suficientemente grande.

Como veremos, estos tres puntos serán suficientes para demostrar el Teorema de Lindemann de manera eficaz. Para ello, necesitaremos los siguientes lemas.

Lema 4.2.1. Supongamos que f tiene grado $m - 1$. Entonces

$$F_k(z) = e^z \left(\sum_{j=0}^m f_k^{(j)}(0) \right) - \sum_{j=0}^m f_k^{(j)}(z)$$

Demostración. Definimos $t = uz^{-1}$, por lo tanto, $u = zt$ y así, $\frac{du}{dt} = z$, entonces $du = zdt$. Notemos que cuando $u = 0$ entonces $t = 0$ y cuando $u = z$ entonces $t = 1$. Sustituyendo:

$$F_k(z) = \int_0^1 e^{z(1-t)} f_k(zt) z dt$$

Integramos por partes utilizando la fórmula

$$\int u^{(0)} v^{(n)} dt = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k u^{(k)} v^{(n-1-k)} + (-1)^n \int u^{(n)} v^{(0)} dt$$

Definimos $u^{(0)} = f_k(tz)$, $v^{(m)} = ze^{z(1-t)} dt$, notemos que

$$v^{(n-1)} = \int e^{z(1-t)} z dt = -e^{z(1-t)} \Rightarrow v^{n-1-j} = (-1)^{j+1} e^{z(1-t)}$$

$$u^{(j)} = f_k^{(j)}(tz) z^j \quad y \quad u^{(m)} = 0$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{z(1-t)} f_k(tz) z dt &= \sum_{j=0}^m (-1)^j f_k^{(j)}(tz) z^j (-1)^{j+1} e^{z(1-t)} \Big|_0^1 \\ &= e^z \sum_{j=0}^m f_k^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^m f_k^{(j)}(z) \end{aligned}$$

■

Lema 4.2.2. Se cumple:

$$(i) \quad M_k = - \sum_{j=1}^t \sum_{m=0}^{p(t+1)} \mu_j f_k^{(m)}(\gamma_j) \quad \text{para } k = 1, \dots, t.$$

$$(ii) \quad \text{Para cada } \sigma \in G(K, \mathbb{Q}), \text{ tenemos que } \sigma(M_1) \in \{M_1, \dots, M_t\}$$

Demostración. (i) Como f_k tiene grado $p(t+1) - 1$, entonces por el lema anterior

$$M_k = \sum_{j=1}^t \mu_j \left[e^{\gamma_j} \sum_{m=0}^{p(t+1)} f_k^{(m)}(0) - \sum_{m=0}^{p(t+1)} f_k^{(m)}(\gamma_j) \right]$$

Sin embargo, por hipótesis, $\sum_{j=1}^t \mu_j e^{\gamma_j} = 0$, así,

$$M_k = - \sum_{j=1}^t \sum_{m=0}^{p(t+1)} \mu_j f_k^{(m)}(\gamma_j)$$

(ii) Por el lema 2.2.2, existe $\sigma_i \in G(K, \mathbb{Q})$ tal que

$$(\sigma_i(\gamma_k), \sigma_i(\mu_k)) = (\gamma_i, \mu_i) \quad \text{para } i = 1, \dots, t$$

Así, aplicando σ_i a los coeficientes de f_1 obtenemos

$$\begin{aligned} f_{\sigma(1)}(x) &= \frac{1}{(p-1)!} l^{tp} (x - \sigma_i(\gamma_1))^{p-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq \sigma(1)}}^t (x - \sigma_i(\gamma_j))^p \\ &= \frac{1}{(p-1)!} l^{tp} (x - \gamma_i)^{p-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^t (x - \gamma_j)^p = f_i(x) \end{aligned}$$

Con lo cual, concluimos que

$$\begin{aligned} \sigma_i(M_1) &= - \sum_{j=1}^t \sum_{m=0}^{p(t+1)} \sigma(\mu_j) f_{\sigma(1)}^{(m)}(\sigma(\gamma_j)) \\ &= - \sum_{j=1}^t \sum_{m=0}^{p(t+1)} \sigma(\mu_j) f_i^{(m)}(\sigma(\gamma_j)) = M_i \end{aligned}$$

■

Lema 4.2.3. Sea $k \in \{1, \dots, t\}$. Entonces se cumple:

- (i) $f_1^{(p-1)}(\gamma_1) = l^{tp} \left(\prod_{k=2}^t (\gamma_1 - \gamma_k) \right)^p$
- (ii) $f_1^{(j)}(\gamma_m) = 0$ para $m = 1, \dots, t$, $j = 0, \dots, p-1$ y $(m, j) \neq (1, p-1)$.
- (iii) $f_1^{(j)}(\gamma_m) \equiv 0 \pmod{p}$ para $m = 1, \dots, t$ y $j \geq p$.

Demostración. En general, si $g(x) = (x-a)^r h$, entonces $g^{(1)}(x) = r(x-a)^{r-1} h + h'(x-a)^r$ y $g^{(1)}(a) = 0$, es claro que $g^{(m)}(a) = 0$ para $m = 0, \dots, r-1$ y $g^{(r)} = r!h(a)$, esto demuestra (i) y (ii). Ahora, sea $m \in \{1, \dots, t\}$ y $j \geq p$, definimos:

$$g(x) := f_1\left(\frac{x}{l}\right) = \frac{1}{(p-1)!} \cdot l(x - l\gamma_1)^{p-1} \prod_{k=2}^t (x - l\gamma_k)^p$$

Entonces $(p-1)!g$ es un polinomio con coeficientes enteros algebraicos, pues escogimos l tal que $l\gamma_j$ sea un entero algebraico. Notemos que si $g = c_r x^r + \dots + c_0 \in \mathbb{C}[x]$, entonces para todo $j \geq 0$:

$$\frac{1}{j!} g^{(j)}(x) = c_r \binom{r}{j} x^{r-j} + c_{r-1} \binom{r-1}{j} + \dots + c_j$$

Por lo tanto, $(p-1)! \frac{g^{(j)}(x)}{j!}$ es un polinomio con coeficientes enteros algebraicos.

En particular $\frac{g^{(j)}(l\gamma_j)}{p}$ es un entero algebraico. Además, por la regla de la cadena $g^{(1)}(x) = f_1^{(1)}\left(\frac{x}{l}\right) \cdot \frac{1}{l}$ y por lo tanto,

$$\frac{f_1^{(j)}(\gamma_m)}{p} = \frac{l^j g^{(j)}(l\gamma_j)}{p}$$

es un entero algebraico. Esto demuestra (iii). ■

Lema 4.2.4. Para p suficientemente grande, M_1 es un entero algebraico no nulo.

Demostración. Aplicando los Lemas 4.2.2 y 4.2.4, tenemos que:

$$M_1 \equiv -\mu_1 A^p \pmod{p} \quad \text{con} \quad A := l^t \left(\prod_{k=2}^t (\gamma_1 - \gamma_k) \right)$$

Por lo tanto, $\frac{M_1 + \mu_1 A^p}{p}$ es un entero algebraico, por lo tanto, M_1 tiene que ser un entero algebraico y veremos que no puede ser nulo para p suficientemente grande. Asumamos que $\frac{\mu_1 A^p}{p}$ (tomando $M_1 = 0$) es un entero algebraico, y $b = N(\mu_1)$, $B = N(A)$, entonces $b, B \in \mathbb{Z}$ por el Lema 2.3.2, utilizando el mismo lema:

$$N\left(\frac{\mu_1 A^p}{p}\right) = \frac{b B^p}{p^d} \in \mathbb{Z}$$

Lo cual es imposible si $p > |bB|$. Por lo tanto, $M_1 \neq 0$. ■

Lema 4.2.5. Para p suficientemente grande $|M_k| < 1$ para $k = 1, \dots, t$.

Demostración. Notemos que:

$$\begin{aligned} F_k(z) &= \int_0^z e^{z-t} f(tz) z dt \leq \int_0^1 e^{|z|} |f(tz)| |z| dt \\ &\leq |z| e^{|z|} \cdot \sup_{\substack{u \in \mathbb{C} \\ |u| \leq |z|}} |f(u)| \end{aligned}$$

Pues f está acotada por una constante M por el Lema 2.5.2, es decir, se puede acotar por la integral de una constante (que es fácil de calcular). Así, sea $\beta =$

$\max \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^t (|\gamma_k - \gamma_j|)$ para toda k , $\omega = \max (|\gamma_i - \gamma_k|)$ para toda i, k , y $\mu = \max \mu_i$

para toda i , entonces, se cumple que para toda k, i :

$$F_k(\gamma_i) \leq |\gamma_i| e^{|\gamma_i|} \cdot \frac{\omega^{p-1} \beta^p l^{tp}}{(p-1)!}$$

Por lo tanto,

$$|M_k| < \mu \cdot t |\gamma_i| e^{|\gamma_i|} \cdot \frac{\omega^p \beta^p l^{tp}}{(p-1)!} = \frac{c^p}{(p-1)!}$$

Donde c es una constante que depende de $\mu, t, \gamma_i, \omega, \beta$ y l , pero independiente de p . Dado que para todo $c > 1$, $\frac{c^p}{(p-1)!} \rightarrow 0$ conforme $p \rightarrow \infty$, entonces $|M_k| < 1$ para toda k para p suficientemente grande. ■

Finalmente, hemos completado los tres puntos propuestos. Por lo tanto, por los Lemas 4.2.2, 4.2.4, 4.2.5

$$|N(M_1)| = \left| \prod_{\sigma \in G(K, \mathbb{Q})} \sigma(M_1) \right| = |M_1 \cdots M_t| = |M_1| \cdots |M_t| < 1$$

Por el Lema 2.3.4, tenemos que $N(M_1)$ es un entero con la propiedad de $N(M_1) < 1$. Por lo tanto, $N(M_1) = 0$, por el Lema 2.3.5, $M_1 = 0$, lo cual contradice el Lema 4.2.4. Así, hemos producido un entero $N(M_1)$ que depende de $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ tal que $0 < N(M_1) < 1$, lo cual es imposible. Con esto finaliza la demostración del Teorema de Lindemann. ■

Como veremos, este Teorema es en realidad una herramienta útil para generar números trascendentales. Veamos algunas consecuencias.

Consecuencias del Teorema de Lindemann

Corolario 4.2.1. Sea α un número algebraico no nulo. Entonces $\beta = e^\alpha$ es un número trascendental.

Demostración: Supongamos lo contrario, entonces β es algebraico, por lo tanto, $e^\alpha - \beta e^0 = 0$, lo cual contradice el Teorema de Lindemann. ■

Corolario 4.2.2. π es trascendental.

Demostración: Supongamos lo contrario, entonces πi es algebraico. Como $e^{\pi i} = -1$ entonces $e^{\pi i} + e^0 = 0$, lo cual contradice el Teorema de Lindemann, por lo tanto, π es trascendental. (Es claro que este argumento se puede extender para demostrar que πi es trascendental.) ■

Corolario 4.2.3. Sea α un número algebraico distinto de 0, entonces $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ y $\tan \alpha$ son trascendentales.

Demostración: Supongamos que $\sin \alpha$ es algebraico. Como $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ entonces $\cos \alpha$ es algebraico. Como $i\alpha$ es algebraico distinto de 0, entonces $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$ es trascendental por el Corolario 4.2.1. Lo cual es una contradicción por ser una suma y producto de números algebraicos. Análogamente para $\cos \alpha$ y $\tan \alpha$, ya que pueden probarse con la identidad $1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$. ■

Corolario 4.2.4. Sea α un número algebraico distinto de 0, 1, entonces $\ln \alpha$ es trascendental.

Demostración: Supongamos que $\ln \alpha$ es algebraico. Entonces $e^{\ln \alpha} = \alpha$ es trascendental, lo cual es una contradicción por el Corolario 4.2.1. ■

Definición. Decimos que los números $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ son algebraicamente independientes si no existe un polinomio (no nulo) $f \in \overline{\mathbb{Q}}[x_1, \dots, x_n]$ tal que $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$.

Observación. Supongamos que α_1 es algebraicamente independiente, entonces es trascendental.

Definición. Dado un subconjunto S de $\mathbb{C}$, definimos el **grado de trascendencia** de S como $\text{trdeg } S$ como el máximo número t tal que S contiene t elementos algebraicamente independientes.

Corolario 5: Supongamos que $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$. Entonces $e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_n}$ son algebraicamente independientes.

Demostración: Sea f cualquier polinomio no nulo en $\overline{\mathbb{Q}}[x_1, \dots, x_n]$. Entonces:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_j \in I} \beta_{i_1} \cdots \beta_{i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$$

para $\beta_{i_1} \cdots \beta_{i_n} \in \overline{\mathbb{Q}}$ y I un conjunto no negativo. Por lo tanto,

$$f(e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_n}) = \sum_{i_j \in I} \beta_{i_1} \cdots \beta_{i_n} e^{\alpha_1 i_1 + \dots + \alpha_n i_n}$$

Como $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$, entonces los exponentes $\alpha_1 i_1 + \dots + \alpha_n i_n$ son distintos. Supongamos lo contrario, entonces $\alpha_1 i_1 + \dots + \alpha_n i_n = \alpha_1 j_1 + \dots + \alpha_n j_n$, entonces $\alpha_1(i_1 - j_1) + \dots + \alpha_n(i_n - j_n) = 0$ lo cual contradice que $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sean linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$ o bien $i_k = j_k$. Por lo tanto, por el Teorema de Lindemann $f(e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_n}) \neq 0$, por lo tanto, $e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_n}$ son algebraicamente independientes o bien, tiene grado de trascendencia n . ■

El siguiente corolario no fue encontrado en ningún artículo relacionado al tema. Reconozco que el resultado podría ser de la autoría de alguien más, pero lo incluyo como resultado de mis observaciones personales.

Corolario 4.2.5. Dadas las condiciones del Teorema de Lindemann, dado $\zeta = \beta_1 e^{\alpha_1} + \dots + \beta_n e^{\alpha_n}$, entonces ζ es un número trascendental.

Demostración: Supongamos lo contrario, entonces ζ es algebraico. Podemos suponer que $\alpha_i \neq 0 \forall i$, de lo contrario, consideremos $\zeta_2 = \zeta - \beta_1 e^0$ como nuestro nuevo $\zeta = \beta_1 e^{\alpha_1} + \dots + \beta_n e^{\alpha_n}$, el cual es la suma de números algebraicos, por lo tanto, es un número algebraico tal que ninguno de sus $\alpha_j = 0$ para toda j . Así,

$$\zeta e^0 - \beta_1 e^{\alpha_1} - \dots - \beta_n e^{\alpha_n} = 0$$

En cualquier caso, hemos generado un número ζ que contradice el Teorema de Lindemann. Por lo tanto, ζ es un número trascendental. ■

4.3 Teorema de Gelfond-Schneider

En el siglo 20, había un gran interés por expandir nuestro conocimiento acerca de los números trascendentales. Motivado por la lista de 23 problemas de David Hilbert [6], el 7mo problema fue resuelto primero por Gelfond, seguido por Schneider de manera independiente, por lo cual, ahora se conoce como el Teorema de Gelfond-Schneider. Como veremos, es en realidad, una máquina para producir números trascendentales.

Teorema 4.3.1 (Teorema de Gelfond-Schneider). Sean α y β números algebraicos tal que $a \neq 0$, $\alpha \neq 1$ y β no es un número racional real, entonces cualquier valor α^β es trascendental.

Demostración. En general, $\alpha^\beta = e^{\beta \log(\alpha)}$ donde $\log(\alpha)$ es en realidad una función multivaluada en los números complejos. Asumamos que α y β satisfacen las hipótesis del problema y definimos $\gamma = e^{\beta \log(\alpha)}$. Sea K una extensión