

Capítulo 6

Conjetura de Collatz

Construyamos una sucesión de números que puede comenzar con cualquier número. Si nuestro número es par, el siguiente será el anterior dividido entre dos. Si nuestro número es impar, el siguiente será el anterior multiplicado por 3 y sumado con 1. Por ejemplo,

$$5 \text{ (impar)} \rightarrow 16 \text{ (par)} \rightarrow 8 \text{ (par)} \rightarrow 4 \text{ par} \rightarrow 2 \text{ par} \rightarrow 1$$

La conjetura de Collatz afirma que esta sucesión de números siempre alcanzará el valor 1. Curiosamente, si repetimos este proceso una vez más $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ se obtiene un pequeño ciclo. Nuestra tarea es el estudio de los ciclos. Problemas como estos pueden generarnos una falsa ilusión, pues aparentan ser sencillos y uno puede sorprenderse al darse cuenta que conecta con áreas tan grandes como sistemas dinámicos, teoría de números trascendentales, teoría de la medida, sistemas computacionales, ecauciones diofanti-
nas, entre muchas otras.

Dada la altura de estas áreas, no es difícil convencerse que proporcionar cualquier avance significativo para demostrar la conjetura requiere de una maquinaria pesada, difícil de comprender e inaccesible para la mayoría de los matemáticos. Es por ello, que se intentará presentar el material con la mayor naturalidad posible para que los problemas surjan a partir de pequeñas observaciones. Esta, es una invitación para cualquier matemático que busque entender las raíces que originan los misterios de la conjetura.

Conjetura de Collatz: Sea $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida como:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \equiv 0 \pmod{2} \\ 3n + 1 & \text{si } n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

Consideremos la sucesión definida como:

$$a_i = \begin{cases} n & \text{para } i=0 \\ f(a_{i-1}) & \text{para } i > 1 \end{cases}$$

Entonces la sucesión eventualmente toma el valor de 1 para todo $n \in \mathbb{N}$. Es decir, $a_j = f^j(n) = 1$ para algún $j \in \mathbb{N}$.

En términos simples, estamos definiendo una función que hace lo siguiente:

- Si n es par, lo dividimos entre 2.
- Si n es impar, lo multiplicamos por 3 y le sumamos 1.
- Con el nuevo valor, repetimos el proceso.

6.1 Dificultades de su estudio

Dada la simplicidad de esta conjetura, no hay muchas posibilidades para cualquier sucesión. Si $a_j = 1$, para alguna j , entonces $a_{j+1} = 4$, $a_{j+2} = 2$, $a_{j+3} = 1$. Es decir, eventualmente se obtiene lo que se considera un ciclo que se repite infinitamente. Si $a_i \neq 1 \forall k$, entonces la sucesión crece indefinidamente o bien, se obtiene algún otro ciclo. Por lo tanto, es suficiente ver que se cumplen dos condiciones para demostrar la veracidad de la conjetura:

- La sucesión a_i no crece indefinidamente.
- No existen ciclos además del trivial $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$.

Muchos matemáticos han intentado abordar de manera directa o indirecta cualquiera de estas dos condiciones, sin éxito. A diferencia de otras sucesiones, no se conoce alguna "fórmula" para obtener el valor de la sucesión en la k -ésima iteración. Esto es particularmente problemático, porque la sucesión puede alcanzar valores muy altos y bajos, sin ningún orden aparente. No obstante, existen acercamientos a dicha fórmula como veremos.

Además, otra de las dificultades es que no tenemos los conocimientos para predecir la descomposición en números primos al sumar 1.

6.2 Enfoques que han proporcionado mayor visión del problema

Las áreas más fructíferas han sido aquellas que trabajan en sistemas dinámicos. Las ecuaciones parciales tienen un comportamiento similar a la función de interés. El resultado más importante hasta el momento fue proporcionado por Terence Tao, al demostrar que la conjetura es casi verdadera para casi todos los números. Por supuesto, visto desde la perspectiva de teoría de la medida, esto significa que el conjunto de números que no cumplen con la conjetura de Collatz tiene medida 0.

6.3 Comportamiento de la función

Para entender acerca de los ciclos, uno primero tiene que estar interesado en comprender el comportamiento de la función. Principalmente, nos interesa conocer por qué la función crece o decrece. Claramente, si n es par, la función decrecerá hasta que deje de serlo. Por lo cual es más interesante conocer hasta qué punto la función crecerá si n es impar. Para ello, analicemos un ejemplo específico:

n	$f(n)$	$f^2(n)$
31	94	47
47	142	71
71	214	107
107	322	161
161	484	242

Podemos notar un comportamiento interesante, primeramente, $f(n)$ siempre es par y $f^2(n)$ es siempre impar (con una excepción). Veamos qué información se puede demostrar a partir de estas observaciones.

Proposición: Si n es impar, entonces $f(n)$ debe ser par.

Demostración Si n es impar, entonces $f(n) = 3n + 1$. Como n es impar, $n = 2k + 1$ para alguna $k \in \mathbb{N}$, por lo tanto, $f(n) = 3(2k + 1) + 1 = 6k + 3 + 1 = 6k + 4 = 2(3k + 2)$. Por lo tanto, $f(n)$ es par y además, $f^2(n) = 3k + 2$.

Observación. Notemos que la diferencia entre 47 y 31 es de 16. La diferencia entre 71 y 47 es de 24. La diferencia entre 107 y 71 es de 36. Y la diferencia entre 161 y 107 es de 54. Para estos valores, la siguiente diferencia será 1.5

veces mayor, es decir, $36 = 24(1.5)$, etc. Sin embargo, la diferencia entre 242 y 161 es de 81. Y $81(1.5)$ no es un entero. Así que algo falló al obtener 242. La clave para entender los ciclos está en comprender por qué este valor rompió con el comportamiento anterior.

Supongamos que el patrón continuara indefinidamente. Es decir, dado n impar $f^2(n)$ sea impar. Entonces por definición:

Iteración k -ésima	Valor obtenido
1	$\frac{3n+1}{2}$
2	$\frac{9n+5}{4}$
3	$\frac{27n+19}{8}$
4	$\frac{81n+65}{16}$
5	$\frac{243n+211}{32}$

Como sospechábamos, estas iteraciones tienen un patrón bien definido:

Proposición: Sea $g(n)$ la n -ésima iteración del patrón anterior, es decir, $g(n+1) = f^2(g(n))$ tal que $g(k)$ es impar para todo $k \in \mathbb{N}$. Entonces, el k -ésimo valor obtenido de $g(k)$ está dado por:

$$g(k) = \frac{3^k n + (3^k - 2^k)}{2^k}$$

Demostración: Veamos por inducción, sea $n = 1$, entonces:

$$g(1) = \frac{3^1(n) + 3^1 - 2^1}{2^1} = \frac{3n + 1}{2}$$

Supongamos que el resultado es válido para $n = k$ y veamos que es cierto para $n = k + 1$. Por hipótesis de inducción:

$$g(k) = \frac{3^k(n) + (3^k - 2^k)}{2^k}$$

Como $g(k)$ sigue el patrón, por definición $g(k+1) = f^2(g(k))$ donde $g(k)$ es impar, por lo tanto,

$$g(k+1) = \frac{3 \left(\frac{3^k(n) + (3^k - 2^k)}{2^k} \right) + 1}{2} = \frac{3^{k+1}(n) + 3^{k+1} - 3(2^k) + 2^k}{2}$$

$$g(k+1) = \frac{3^{k+1}(n) + (3^{k+1} - 2 \cdot 2^k)}{2 \cdot 2^k} = \frac{3^{k+1}(n) + (3^{k+1} - 2^{k+1})}{2^{k+1}}$$

Lo cual completa la inducción.