

Ecuaciones diofantinas en la conjetura de Collatz

El problema de los ciclos

Kevin Martin Cossio Lozano

Universidad Autónoma de Ciudad Juárez

Septiembre 2023



- 1 Fundamentos esenciales
- 2 Conjetura de Collatz
- 3 Teorema de Steiner

1 Fundamentos esenciales

Fracciones continuas

Teoría de números trascendentales

2 Conjetura de Collatz

3 Teorema de Steiner

1 Fundamentos esenciales

Fracciones continuas

Teoría de números trascendentales

2 Conjetura de Collatz

3 Teorema de Steiner

Fracciones continuas

Definición: Una fracción continua, es una expresión de la forma:

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots}}}$$

Y se denota como $[a_0, a_1, a_2, \dots]$. A los números a_j se les conoce como los **cocientes parciales**. Por ejemplo, $\sqrt{11} = [3, 3, 6, 3]$, es decir,

$$\sqrt{11} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{\ddots}}}$$

Fracciones continuas

Definición: Definimos a $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ como el enésimo **convergente** de $[a_0, a_1, a_2, \dots]$. Es decir, es el resultado de la siguiente fracción continua:

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}$$

Donde $(p_n, q_n) = 1$.

Fracciones continuas

Teorema [Convergencia]: Sea α un número real, $\frac{p}{q}$ una fracción tal que se satisface:

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2}$$

Entonces $\frac{p}{q}$ es un convergente de la fracción continua de α . Por ejemplo,

$$\left| \sqrt{11} - \frac{10}{3} \right| < \frac{1}{2(3)^2}$$

Por lo tanto, $\frac{10}{3}$ es un convergente de la fracción continua de $\sqrt{11}$, y de hecho, $\frac{10}{3} = [3, 3]$, de donde $\sqrt{11} = [3, 3, 6, 3, 6, \dots]$

Fracciones continuas

Teorema [Ley de la mejor aproximación]: Sea α un número real y $\frac{p_n}{q_n}$ un convergente de su fracción continua. Si p, q son enteros tales que $0 < q \leq q_n$ y $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$, entonces,

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|$$

En particular, $\frac{22}{7} = [3, 7]$ es un convergente de la fracción continua de $\pi = [3, 7, 15, 1, 292]$. Por lo tanto, no existe una fracción con un denominador menor o igual a 7 que se aproxime mejor a π .

Fracciones continuas

Teorema [Cocientes parciales]: Sea α un número real, $\frac{p_n}{q_n}$ un convergente en la fracción continua de α , entonces,

$$\frac{1}{(a_{n+1} + 2)q_n^2} < \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right|$$

Por ejemplo, dado $\alpha = \pi = [3, 7, 15, 1, \dots]$, $\frac{p_n}{q_n} = \frac{333}{106} = [3, 7, 15]$, entonces se cumple:

$$\frac{1}{(1 + 2)(106)^2} < \left| \pi - \frac{333}{106} \right|$$

$$\frac{1}{33708} < \left| \pi - \frac{333}{106} \right|$$

1 Fundamentos esenciales

Fracciones continuas

Teoría de números trascendentales

2 Conjetura de Collatz

3 Teorema de Steiner

Teoría de números trascendentales

Definición: Decimos que ζ es un número algebraico si existe un polinomio no nulo $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $p(\zeta) = 0$.

Ejemplo 1: El número $\sqrt{2}$ es una raíz del polinomio $p(x) = x^2 - 2$, por lo tanto, es un número algebraico.

Ejemplo 2: El número i es una raíz del polinomio $p(x) = x^2 + 1$, por lo tanto, es un número algebraico.

Definición: Decimos que un número α es **trascendental** si no es un número algebraico.

Se puede demostrar que π y e son números trascendentales.

Teoría de números trascendentales

Teorema [Teorema de Gelfond-Schneider]: Sean α y β números algebraicos tal que $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ y β no es un número racional real, entonces cualquier valor α^β es trascendental.

Corolario 1: El número $2^{\sqrt{2}}$ es un número trascendental.

Corolario 2: El número e^π es un número trascendental.

Demostración: Notemos que $-(i)^2 = 1$, por lo tanto:

$$e^\pi = (e^{i\pi})^{-i} = (-1)^{-i}$$

Donde $-1, -i$ son algebraicos con $-1 \neq 0, 1$ y como $-i$ no es un número racional real, por el Teorema de Gelfond-Schneider, $(-1)^{-i} = e^\pi$ es un número trascendental. □